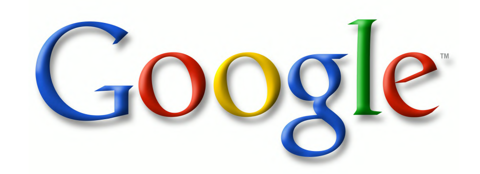
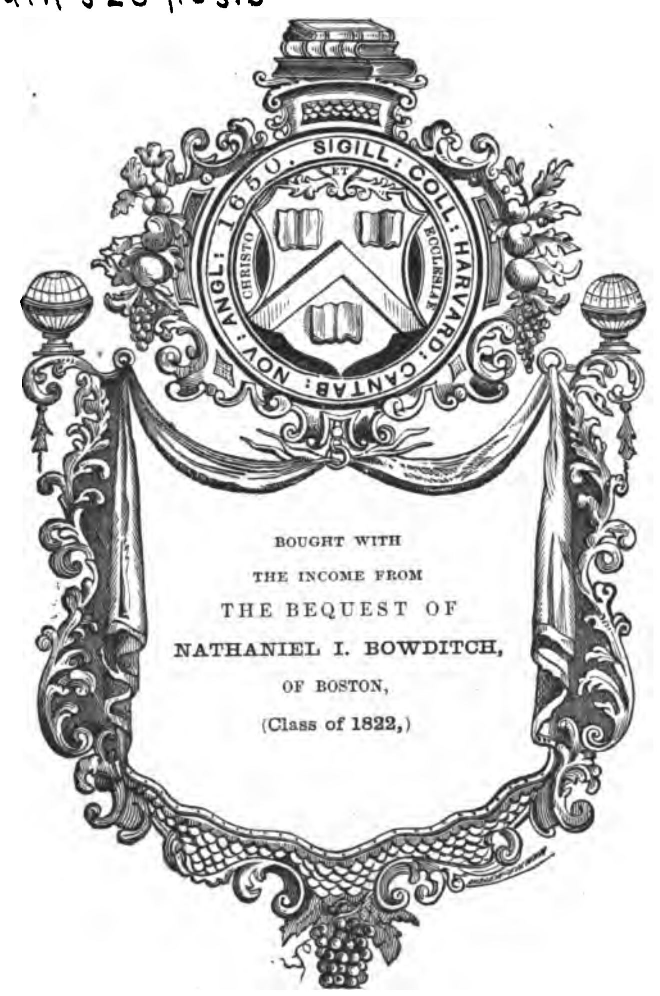



SIGILL: COLL: HARVARD: CANTAB: NOV: ANGL: 1650.
CHRISTO ET ECCLESIAE
BOUGHT WITH
THE INCOME FROM
THE BEQUEST OF
NATHANIEL I. BOWDITCH,
OF BOSTON,
(Class of 1822,)

Über eine Anwendung der Theorie der linearen Differentialgleichungen auf die Differentialgleichung der Kugelfunctionen einer Variablen.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der philosophischen Doktorwürde

der

hohen philosophischen Fakultät der Königl. Universität Greifswald

vorgelegt

und nebst den beigefügten Thesen

öffentlich verteidigt

am Donnerstag, den 18. Juni 1903,

mittags 12 Uhr

von

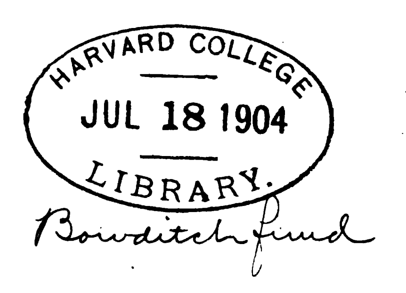
Joseph Huss

aus Wongrowitz.

Opponenten:

Herr cand. math. O. Griebenow.
Herr cand. math. E. Nowaczkiewicz.
Herr cand. phil. P. Söhnlein.

Greifswald.
Druck von F. W. Kunike.
1903.



Gedruckt mit Genehmigung
der philosophischen Fakultät der Königl. Universität
Greifswald.

Prof. Dr. Cohen, Dekan.

Referent: Geh. Rath Prof. Dr. W. Thomé.

Seiner lieben Mutter.

Die lineare Differentialgleichung der Kugelfunctionen einer Variablen wird nach der allgemeinen Theorie der linearen Differentialgleichungen behandelt und die auf diese Weise construirten Ausdrücke der Integrale werden mit den Integralen verglichen, die sich ergeben, wenn die Differentialgleichung als Specialfall der Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe angesehen wird.

Die lineare Differentialgleichung der Kugelfunctionen einer Variablen lautet

$$(1) \qquad (1-x^2)\frac{d^2z}{dx^2} - 2x\frac{dz}{dx} + n(n+1)z = 0.$$

Die linearen homogenen Differentialgleichungen der Fuchs'schen Klasse n^{ter} Ordnung haben die Gestalt

$$y^{(n)} + \frac{g_{\varrho-1}}{\psi}y^{(n-1)} + \frac{g_{2(\varrho-1)}}{\psi^2}y^{(n-2)} + \ldots + \frac{g_{n(\varrho-1)}}{\psi^n}y = 0$$

wo $\psi = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_\varrho)$, $a_1, a_2, \ldots a_\varrho$ die sämtlichen singulären Punkte im Endlichen sind und g_λ eine ganze rationale Function von x bedeutet, deren Grad $\leqq \lambda$. Wie aus der Form der Differentialgleichung (1) zu ersehen ist, ist sie demnach eine Differentialgleichung zweiter Ordnung der Fuchs'schen Klasse mit 2 endlichen singulären

Punkten. Die beiden Punkte sind $+1$ und -1, als dritte singuläre Stelle tritt $x = \infty$ hinzu. Die Gleichungen der Fuchs'schen Klasse haben die Eigenschaft, dass sie nur Stellen der Bestimmtheit besitzen oder, wenn ihre Ordnung gleich n ist, n nur reguläre Integrale für jeden Punkt. Haben wir nun eine Gleichung von der Form

$$g_0(x)y^{(m)} + g_1(x)y^{(m-1)} + \ldots + g_m(x)\,y = 0,$$

wobei $g_0(x)$ eine ganze rationale Function des m^{ten} Grades, $g_k(x)$ eine solche, deren Grad nicht grösser als $m-k$, g_m von Null verschieden ist und wenn die Integrale regulär sein sollen, so lautet ein Satz von Fuchs*): „Besitzt die zu $x = \infty$ gehörige determinierende Fundamentalgleichung ganzzahlige negative Wurzeln und ist $-r$ diejenige unter ihnen, deren absoluter Betrag r den kleinsten Wert hat, so hat die obige Differentialgleichung eine ganze rationale Function r^{ten} Grades als Integral.“ Die determinierende Fundamentalgleichung einer linearen homogenen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung

$$p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_n y = 0$$

an einer endlichen Stelle $x = a$ lautet

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=n} \mathfrak{P}_\nu(a)\,k(k-1)\ldots(k-n+\nu+1) = 0,$$

wobei $\mathfrak{P}_\nu(a)$ die Anfangscoefficienten der gewöhnlichen Potenzreihen von $(x-a)$, $\mathfrak{P}_\nu$, in der zu a gehörigen, sogenannten Normalform

$$(x-a)^n \mathfrak{P}_0(x-a)y^{(n)} + (x-a)^{n-1}\mathfrak{P}_1(x-a)y^{(n-1)} + \ldots \\ + \mathfrak{P}_n(x-a)y = 0.$$

*) Journal für Math. B. 106.

Als die zu $x = \infty$ gehörige determinierende Fundamentalgleichung wird von Fuchs und den meisten anderen Mathematikern die definiert, die sich ergiebt, wenn man in der Differentialgleichung $x = \frac{1}{z}$ substituiert und die zu $z = 0$ gehörige bildet. Berechnen wir nach dem Obigen die zu $x = \infty$ gehörige Fundamentalgleichung unserer Gleichung (1), so lautet sie $(k-1)k - n(n+1) = 0$ und besitzt, da das n in dem Coefficienten von (1) eine ganze Zahl ist, die ganzzahligen Wurzeln $-n$ und $(n+1)$. (1) hat auch die von dem Fuchs'schen Satz vorausgesetzte Form und besitzt, wie bereits erwähnt, reguläre Integrale. Wir erhalten demnach eine ganze rationale Function n^{ten} Grades $P_1^n(x)$ als Integral unserer Gleichung. Das eine Integral z_1 jedes zu den beiden singulären Punkten $+1$ und -1 gehörigen Fundamentalsystems kann sich nur um einen constanten Faktor von $P_1^n(x)$ unterscheiden, da $P_1^n(x)$ als ganze rationale Function ohne weiteres eine für das ganze Gebiet von x gültige Lösung darstellt.

Zu der grösseren Wurzel der zu $x = \infty$ gehörigen determinierenden Fundamentalgleichung gehört eine nach absteigenden ganzen Potenzen von x geordnete mit x^{-n-1} beginnende Reihe $Q_1^n(x)$. Zu einer Wurzel der determinierenden Fundamentalgleichung, welche von keiner anderen Wurzel um eine positive ganze Zahl übertroffen wird, gehört nämlich nach der Theorie der Differentialgleichungen, ohne dass noch einige Bedingungen erfüllt werden müssen, ein reihenförmiges Integral. Für das zu $x = \infty$ gehörige Integral $Q_1^n(x)$ suchen wir aber eine andere analytische Gestalt, wie sie die Theorie der Differentialgleichungen liefert, und finden sie mit Hülfe der Daten, die uns diese Theorie giebt, durch spezielle func-

tionentheoretische Betrachtungen. Haben wir an einer singulären Stelle a ein reihenförmiges Integral $z_1 = (x-a)^{r_1} \varphi_1(x-a)$ einer Differentialgleichung 2[ter] Ordnung, so liefert das zweite linear unabhängige z_2 die Fuchs'sche Methode. Gehören r_1, r_2 die Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichung einer Gruppe an, d. h. unterscheiden sie sich nur um ganze Zahlen oder Null von einander und möge r_2 seinem reellen Teil nach nicht grösser sein als r_1, so ist

$$z_2 = (x-a)^{r_1} \varphi_1 \int (x-a)^{r_2 - r_1 - 1} \varphi_2 \, dx$$

dies zweite Integral. Das erste reihenförmige Integral z_1 müssen wir, wie es diese Methode erfordert, als zu der grösseren Wurzel gehörig annehmen. Das Integral $(x-a)^{r_2-r_1-1}\varphi_2$ ist die Lösung der Gleichung für y, die sich aus der Differentialgleichung 2[ter] Ordnung ergiebt, wenn in sie $y_1 \int y dx$ eingesetzt wird. Nach ausgeführter Integration erhält z_2 die analytische Gestalt $z_2 = (x-a)^{r_2} [\varphi_{21} + \varphi_{22} \log (x-a)]$, wobei φ_{21}, φ_{22} gewöhnliche Potenzreihen von $(x-a)$ sind. Sind die Wurzeln r_1, r_2 gleich, so ist das zweite mit dem Logarithmus behattete Glied sicher von Null verschieden. φ_2 ist in dem Integral $(x-a)^{r_2-r_1-1}\varphi_2$ eine gewöhnliche Potenzreihe mit von Null verschiedenem constanten Glied und das Integral beginnt so, da $r_2 = r_1$ sein soll, mit der -1[ten] Potenz. Nach ausgeführter Integration und Multiplikation wird demnach in

$$z_2 = (x-a)^{r_2} [\varphi_{21} + \varphi_{22} \log (x-a)]$$

$$(x-a)^{r_2} \varphi_{22} \log (x-a)$$

nicht verschwinden. In unserem Fall haben die determinieren-

den Fundamentalgleichungen an der Stelle $a = +1$, $a = -1$ die Wurzeln $r_1 = r_2 = 0$. Das reihenförmige Integral z_1 ist die ganze rationale Function $P_1^n(x)$ und z_1 ist zu r_1 gehörig. Ordnen wir die rationale ganze Function $P_1^n(x)$ nach aufsteigenden Potenzen von $(x-1)$ oder $(x+1)$, so beginnt sie mit der 0ten Potenz, weil r_1 in z_1 gleich Null ist, und man sagt von z_1, da es mit der r_1^{ten} Potenz beginnt, es gehöre zu ihr. Das zweite Integral des Fundamentalsystems an den Stellen $+1$, -1 wird demnach die Gestalt

$$z_2 = \varphi_{21} + c_1 \varphi_{22} \log(x-1)$$

und

$$z_2 = \psi_{21} + c_2 \varphi_{22} \log(x+1)$$

annehmen.

In den z_2 ist $\varphi_{22} = c_1 z_1$, $c_2 z_1$, wie man bei der Ableitung der Gestalt $(x-a)^{r_2}[\varphi_{21} + \varphi_{22}\log(x-a)]$ aus

$$(x-a)^{r_1}\varphi_1\int(x-a)^{r_2-r_1-1}\varphi_2\,dx$$

durch Integration und Multiplikation ersieht. φ_{21}, ψ_{21} sind nach der Theorie der Differentialgleichungen gewöhnliche Potenzreihen. Nach Ermittelung der zu den singulären Stellen gehörigen Integrale z_2 gehen wir dazu über, die Umlaufsrelationen und das Verhalten von $Q_1^n(x)$ in den singulären Punkten zu bestimmen, um hieraus die gesuchte analytische Gestalt zu konstruieren. Die Umlaufsrelationen von $Q_1^n(x)$ leiten wir aus den zu den Punkten $+1$, -1 gehörigen Fundamentalsystemen ab. Sie lauten, wenn wir mit $\bar{z}_1$, $\bar{z}_2$ die nach dem Umlauf aus z_1, z_2 entstandenen Integrale bezeichnen,

$$\bar{z}_1 = z_1$$
$$\bar{z}_2 = z_2 + 2\pi i c z_1.$$

Bei einer Stelle der Bestimmtheit a des Gebietes einer Differentialgleichung sind nach der allgemeinen Theorie der Differentialgleichungen die Integrale innerhalb der Umgebung des Punktes a definiert. Sie besteht bei den im Endlichen gelegenen Punkten aus einem Kreise, der a zum Mittelpunkt hat und bis zum nächsten singulären Punkt heranreicht. Bei $a = \infty$ ist im allgemeinen der Definitionsbereich der Teil der Ebene, der ausserhalb des um Null geschlagenen und durch den von Null am weitesten entfernten, endlichen singulären Punkt gehenden Kreises liegt. Der Gültigkeitsbereich für die Integrale $P_1^n(x)$, $Q_1^n(x)$ liegt nach dem Obigen zum Teil in den Umgebungen der singulären Stellen $+1$ und -1. $P_1^n(x)$ und $Q_1^n(x)$ werden in den gemeinsamen Gebieten nach der Theorie der Differentialgleichungen eine lineare homogene Verbindung der zu $+1$ resp. -1 gehörigen Fundamentalsysteme sein von der Form

$$\begin{aligned} P_1^n(x) &= \alpha_{11}^{(k)} z_{k1} + \alpha_{12}^{(k)} z_{k2} \\ Q_1^n(x) &= \alpha_{21}^{(k)} z_{k1} + \alpha_{22}^{(k)} z_{k2} \end{aligned} \quad [k = +1, -1]$$

wobei z_{k1} das logarithmenfreie, z_{k2} das logarithmenbehaftete Integral bedeutet. Wie bereits oben bemerkt, ist $P_1^{(n)}(x)$ gleich z_{k1}, $\alpha_{12}^{(k)}$ muss demnach Null sein. $P_1^n(x)$, $Q_1^{(n)}(x)$ sind linear unabhängig, hieraus $\alpha_{22} \neq 0$. $Q_1^n(x)$ ist so eine lineare homogene Verbindung der ganzen rationalen Function z_{k_1} und der mit dem Logarithmus behafteten z_{k_2} von der Form $Q_1^n(x) = \alpha_{21}^{(k)} z_{k1} + \alpha_{22}^{(k)} z_{k_2}$, bei der $\alpha_{22}^{(k)} \neq 0$ ist. Berücksichtigen wir die früher aufgestellten Umlaufsrelationen, so sehen wir, dass $Q_1^n(x)$ sich beim Umlauf um die singulären Punkte $+1$, -1 um $2\pi i c_1 P_1^n(x)$, $2\pi i c_2 P_1^n(x)$ vermehrt. Somit haben wir bereits einen Anhaltspunkt für die gesuchte

analytische Gestalt von $Q_1^n(x)$ gewonnen. Gehen wir weiter. Da $Q_1^n(x)$ nach der Theorie der Differentialgleichungen eine nach absteigenden ganzen Potenzen von x geordnete mit x^{-n-1} beginnende Reihe ist, so kann es sich bei einem Umlauf um $x=\infty$ nicht ändern. Wir haben somit die Eigenschaften von $Q_1^n(x)$ bei einem Umlauf um die singulären Punkte gefunden. Nun kommt ein Umlauf von x auf geschlossenem Wege, der um alle im Endlichen gelegenen singulären Punkte im negativen Sinne, d. h. in der Bewegung eines in $x=0$ befestigt gedachten Uhrzeigers besteht, einem positiven Umlauf der Variablen um $x=\infty$ gleich. Vermehrt sich demnach $Q_1^n(x)$ um $2\pi i c P_1^n(x)$ bei einem Umlauf um den Punkt $+1$, so muss es bei einem Umlauf um -1 wieder um denselben Betrag abnehmen. Wie die Functionentheorie weiter lehrt, ist der Logarithmus eine Function, die sich bei einem Umlauf in positiver Richtung um a, wenn ihr Argument $(x-a)$ und der mit ihr multiplizierte Faktor C ist, um $2\pi i C$ vermehrt. Nach dem Vorhergehenden müssen wir $Q_1^n(x)$ in der Gestalt

$$-cP_1^n(x)\log(x+1)+cP_1^n(x)\log(x-1)$$

vermehrt um eine einwertige Function φ annehmen. Ziehen wir den Ausdruck

$$-cP_1^n(x)\log(x+1)+cP_1^n(x)\log(x-1)$$

von $Q_1^n(x)$ nämlich ab, so ändert die Differenz sich nicht bei einem Umlauf um die endlichen singulären Punkte $+1$, -1 und ebenfalls um $x=\infty$. Ändert sich eine Function beim Umlauf um die singulären Punkte nicht, so ist sie einwertig. Die obige Differenz oder φ ist demnach einwertig. Um die einwertige Function φ näher zu bestimmen, müssen

wir untersuchen, wie sich die obige Differenz in den einzelnen Punkten der xEbene verhält. $Q_1^n(x)$ wird, wie aus seiner Form $\alpha_{21}^{(k)} z_{k1} + \alpha_{22}^{(k)} z_{k2}$ zu ersehen, in $-1, +1$ logarithmisch unendlich wie

$$-cP_1^n(x)\log(x+1) \quad \text{und} \quad +cP_1^n(x)\log(x-1)$$

die Differenz bleibt demnach endlich. $Q_1^n(x)$ bleibt in allen anderen endlichen Punkten nach der Theorie der Differentialgleichungen endlich und der Ausdruck

$$-cP_1^n(x)\log(x+1) + cP_1^n(x)\log(x-1),$$

wie aus seiner Form zu ersehen, ebenso, die Differenz demnach in endlichen Punkten endlich. In $x = \infty$ wird $Q_1^n(x)$, wie aus der durch die Theorie der Differentialgleichungen erhaltenen Form zu ersehen ist, Null,

$$-cP_1^n(x)\log(x+1) + cP_1^n(x)\log(x-1)$$

wird dagegen in $x = \infty$ von der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung unendlich, die Differenz demnach ebenso. Eine einwertige Function, die im Endlichen endlich bleibt, im Unendlichen von der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung unendlich wird, ist eine ganze rationale Function $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades. Wir haben somit gefunden, dass φ eine ganze rationale Function $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades ist. Wir entwickeln den Ausdruck $-c\log(x+1)+c\log(x-1)$, den wir gleich $-c\log(1+{}^1/_x)+c\log(1-{}^1/_x)$ setzen können in der Umgebung von $x = \infty$ in eine Potenzzeile und thun dies, indem wir $\log(1+{}^1/_x)$ und $\log(1-{}^1/_x)$ einzeln entwickeln. Wir erhalten für

$$\log(1+{}^1/_x) = x^{-1} - {}^1/_2 x^{-2} + {}^1/_3 x^{-3} - \ldots$$

und für

$$\log(1-{}^1/_x) = -x^{-1} - {}^1/_2 x^{-2} - {}^1/_3 x^{-3} - \ldots$$

und für den obigen Ausdruck eine nach fallenden Potenzen von x geordnete Reihe

$$-2c\left\{x^{-1}+{}^1/_3x^{-3}+{}^1/_5x^{-5}+\ldots\ldots\ldots\right\}.$$

Multiplicieren wir diese Reihe mit $P_1^n(x)$, vermehren wir den so erhaltenen Ausdruck um φ und ordnen nach fallenden Potenzen, so erhalten wir für

$$Q_1^n(x)=-cP_1^n(x)\log(x+1)+cP_1^n(x)\log(x-1)+\varphi$$

eine Reihe von der Gestalt, wie sie uns die Theorie der Differentialgleichungen liefert und wobei der Coefficient des ersten Gliedes die Constante c als Faktor enthält. Der Coefficient des ersten Gliedes eines reihenförmigen Integrals ist nach der Theorie der Differentialgleichungen willkürlich. Wir können so der Constanten c den Wert $-{}^1/_2$ geben. $Q_1^n(x)$ nimmt die Gestalt

$${}^1/_2P_1^n(x)\log\frac{(x+1)}{(x-1)}+\varphi \text{ an.}$$

Um die Coefficienten der ganzen rationalen Function φ bestimmen zu können, müssen wir zunächst die Coefficienten von $P_1^n(x)$ vermittelst der Theorie der Differentialgleichungen berechnen. Die Coefficienten c einer sich bei $x=a$ bestimmt verhaltenden Reihe

$$\eta=\sum_k c_k(x-a)^k\ [k=\alpha,\ \alpha+1,\ \ldots],$$

welche der bereits in Normalform geschriebenen Differentialgleichung

$$(x-a)^n\mathfrak{P}_0(x-a)y^{(n)}+(x-a)^{n-1}\mathfrak{P}_1(x-a)y^{(n-1)}+\ldots$$
$$+(x-a)\mathfrak{P}_{n-1}(x-a)y^{(1)}+\mathfrak{P}_n(x-a)y=0,$$

wobei $\mathfrak{P}_0$, $\mathfrak{P}_1$ ... $\mathfrak{P}_n$ gewöhnliche Potenzreihen von $(x-a)$

sind und nicht sämtlich für $x = a$ verschwinden, bei der ihrem Gebiet angehörigen Stelle $x = a$ genügen soll, müssen der Recursionsformel

$$F_{k\alpha} = a_{k\alpha} c_\alpha + a_{k\alpha+1} c_{\alpha+1} + \ldots a_{kk} c_k = 0$$

oder dem aus dieser für $k = \alpha, \alpha + 1, \ldots$ entspringenden Gleichungssystem genügen. a_{ks} ist hierbei

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=n} p_{\nu, k-s} s(s-1) \ldots \ldots (s - n + \nu + 1),$$

$p_{\nu\lambda} = \dfrac{\mathfrak{P}_\nu^{(\lambda)}(x-a)}{\lambda!}$ für $x = a$, α Anfangsexponent, k durchläuft die Werte $\alpha, \alpha+1, \alpha+2, \ldots\ldots, s$ die Werte $\alpha, \alpha+1, \ldots k$ *) Für die Stelle $x = \infty$ ergiebt sich die Recursionsformel, wenn wir die Differentialgleichung durch $x = \frac{1}{z}$ transformieren und die für $z = 0$ gehörige bilden. Die so für $P_1^n(x)$ gebildete Recursionsformel bricht mit dem $(2n+1)^{\text{ten}}$ Coefficienten ab, da aber in $P_1^n(x)$ auch nur $(n+1)$ Coefficienten vorkommen, so können sie berechnet werden. Die Entwickelung von $\log\frac{(x+1)}{(x-1)}$ ist nach dem Vorhergehenden gegeben, die Coefficienten von φ können wir demnach berechnen.

Da nämlich $Q_1^n(x) - \frac{1}{2}P_1^n(x)\log\frac{(x+1)}{(x-1)}$ für jeden Wert von x gleich dem Ausdruck φ sein soll, so müssen die Coefficienten gleich hoher Potenzen auf beiden Seiten gleich sein.

*) Heffter. Einleitung in die Theorie der linearen Differentialgleichungen S. 12.

Die Coefficienten von $Q_1^n(x)$ brauchen wir hierzu nicht zu berechnen, weil $Q_1^n(x)$ erst mit der $(-n-1)^{\text{ten}}$ Potenz, φ mit der $(n-1)^{\text{ten}}$ beginnt.

Nachdem wir die Differentialgleichung der Kugelfunctionen einer Variablen nach der allgemeinen Theorie der Differentialgleichungen behandelt haben, schreiten wir jetzt zu der Aufgabe, sie als Spezialfall der Gleichung der hypergeometrischen Reihe oder der Gauss'schen Gleichung

$$y(1-y)\frac{d^2z}{dy^2}+\left\{\gamma-(\alpha+\beta+1)y\right\}\frac{dz}{dy}-\alpha\beta z=0$$

aufzufassen. Setzen wir in dieser Gleichung

$$y=x^2,\quad \alpha=-\frac{n}{2},\quad \beta=\frac{n+1}{2},\quad \gamma=\frac{1}{2},\text{*)}$$

so bekommen wir mit Berücksichtigung, dass

$$\frac{dz}{dy}=\frac{1}{2x}\frac{dz}{dx},\quad \frac{d^2z}{dy^2}=\frac{1}{4x^2}\frac{d^2z}{dx^2}-\frac{1}{4x^3}\frac{dz}{dx}\text{ ist.}$$

$$x^2(1-x^2)\frac{1}{4x^2}\left(\frac{d^2z}{dx^2}-\frac{1}{x}\frac{dz}{dx}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}x^2\right)\frac{1}{2x}\frac{dz}{dx}+\frac{n(n+1)}{4}z=0.$$

Dieses ist nach geschehener Reduktion unsere Differentialgleichung (1). Auf die Integrale an der Stelle $y=\infty$ der Gauss'schen Gleichung kommt für die späteren Untersuchungen es nur an. Sie lauten bekanntlich

I. $$cy^{-\alpha}F\left(\alpha,\ \alpha+1-\gamma,\ \alpha+1-\beta,\ \frac{1}{y}\right)$$

II. $$c_1y^{-\beta}F\left(\beta,\ \beta+1-\gamma,\ \beta+1-\alpha,\ \frac{1}{y}\right),$$

*) Heine, Kugelfunctionen I. 2. Aufl. S. 147.

wenn $F(\alpha, \beta, \gamma, y)$ die Reihe

$$1 + \frac{\alpha\beta}{1\gamma} y + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2\gamma(\gamma+1)} y^2 + \ldots\ldots$$

bezeichnet. (1) wird demnach an der singulären Stelle ∞ die Integrale

$$\text{a)} \qquad P^n(x) = cx^n F\left(-\frac{n}{2}, \frac{-n+1}{2}, \frac{-2n+1}{2}, x^{-2}\right)$$

$$\text{b)} \qquad Q^n(x) = c_1 x^{-n-1} F\left(\frac{n+1}{2}, \frac{n+2}{2}, \frac{2n+3}{2}, x^{-2}\right)$$

besitzen. Wir wollen nun $Q^n(x)$ durch $P^n(x)$ wie im ersten Teil ausdrücken und können dies vermöge einer Beziehung zwischen hypergeometrischen Reihen. Die betreffende Relation lautet

$$F(\alpha, \beta, \gamma, y) = F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, y) - \frac{\alpha(\gamma-\beta)y}{\gamma(\gamma+1)} F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2, y)$$

Setzen wir hierin $\alpha = -\frac{n}{2}$, $\beta+1 = \frac{-n+1}{2}$, $\gamma+1 = \frac{-2n+1}{2}$, $y = x^{-2}$ und multiplicieren die Gleichung mit x^{n+1}, so bekommen wir

$$(1) \quad x^{n+1} F\left(-\frac{n}{2}, \frac{-n-1}{2}, \frac{-2n-1}{2}, x^{-2}\right)$$
$$= x^{n+1} F\left(-\frac{n}{2}, \frac{-n+1}{2}, \frac{-2n+1}{2}, x^{-2}\right)$$
$$- \frac{\frac{n}{2}\cdot\frac{n}{2}}{\left(\frac{2n+1}{2}\right)\left(\frac{2n-1}{2}\right)} x^{n-1} F\left(\frac{-n+2}{2}, \frac{-n+1}{2}, \frac{-2n+3}{2}, x^{-2}\right).$$

Multipliciert man diesen Ausdruck mit dem numerischen Faktor $\frac{1.3.5\ldots(2n+1)}{1.2\ldots\ldots(n+1)}$ und giebt man der Constanten c von $P^n(x) = cx^n F\left(-\frac{n}{2}, \frac{-n+1}{2}, \frac{-2n+1}{2}, x^{-2}\right)$, wie es auch in der Theorie der Kugelfunctionen üblich ist, den Wert $\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots\ldots n}$, für $n=0$ den Wert 1, so erhält man

$$\text{(c)}\qquad P^{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1}\, x P^n(x) - \frac{n}{n+1} P^{n-1}(x).$$

Dieselbe Relation leiten wir für $Q^n(x)$ her. Wir setzen in der Beziehung der hypergeometrischen Reihen

$$\alpha = \frac{n+1}{2},\quad \beta+1 = \frac{n+2}{2},\quad \gamma+1 = \frac{2n+3}{2},\quad y = x^{-2}$$

und multiplicieren mit x^{-n}. Wir erhalten dann

$$\text{(2)}\qquad x^{-n} F\left(\frac{n+1}{2}, \frac{n}{2}, \frac{2n+1}{2}, x^{-2}\right)$$

$$= x^{-n} F\left(\frac{n+1}{2}, \frac{n+2}{2}, \frac{2n+3}{2}, x^{-2}\right)$$

$$-\frac{\frac{n+1}{2}\cdot\frac{n+1}{2}}{\frac{2n+1}{2}\cdot\frac{2n+3}{2}}\, x^{-n-2} F\left(\frac{n+3}{2}, \frac{n+2}{2}, \frac{2n+5}{2}, x^{-2}\right).$$

Multiplicieren wir diesen Ausdruck mit dem Werte $\frac{1.2.3\ldots\ldots n}{1.3\ldots(2n+1)}$ und geben wir dem c_1 in

$$Q_n(x) = c_1 x^{-n-1} F\left(\frac{n+1}{2}, \frac{n+2}{2}, \frac{2n+3}{2}, x^{-2}\right)$$

den Wert $\frac{1.2.3\ldots\ldots n}{1.3\ldots(2n+1)}$, für $n=0$ den Wert 1, so erhalten wir für $Q(x)$

$$\text{(d)}\qquad Q^{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1}\, x\, Q^n(x) - \frac{n}{n+1}\, Q^{n-1}(x).$$

Wie aus (c) und (d) ersichtlich, drücken sich die $Q(x)$ und $P(x)$ durch die zwei ihrem Grade nach folgenden $Q(x)$ und $P(x)$ in derselben Weise aus. $P^n(x)$ wird demnach recurrierend aus $P^1(x)$. $P^0(x)$ ebenso wie $Q^n(x)$ aus $Q^1(x)$, $Q^0(x)$ in der Form dargestellt

$$\text{(e)}\qquad \begin{aligned} P^n(x) &= AP^1(x)+BP^0(x) \\ Q^n(x) &= AQ^1(x)+BQ^0(x), \end{aligned}$$

wobei A und B gewisse ganze Functionen von x bezeichnen. Aus (1) S. 12 wird $P^0(x)$ gleich 1, $P^1(x) = xP^0(x)$. Wie aus

$$Q^n(x) = \frac{1.2\ldots\ldots n}{1.3\ldots(2n+1)}\, x^{-n-1} F\left(\frac{n+1}{2}, \frac{n+2}{2}, \frac{2n+3}{2}, x^{-2}\right)$$

zu ersehen, wird

$$Q^0(x) = x^{-1} F(1/2, 1, 3/2, x^{-2}) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+1/x}{1-1/x}\right)$$

und aus (2) S. 13 $xQ^0(x) - Q^1(x) = 1$. Mit Berücksichtigung der Formeln (e) S. 14 erhält man

$$P^n(x) = (Ax+B)P^0 = Ax+B$$

$$Q^n(x) = (Ax+B)Q^0 - A, \quad \text{hieraus}$$

$$Q^n(x) = \frac{1}{2} P^n(x) \log\frac{x+1}{x-1} - A.^{*)}$$

*) Heine, Kugelfunctionen I. 2. Aufl. S. 96.

A ist, wie aus der Herleitung von $P^n(x)$ aus $P^0(x)$, $P^1(x)$ zu ersehen ist, eine ganze rationale Function vom Grade $(n-1)$ und seinen Coefficienten nach leicht zu berechnen.

Wir wollen schliesslich die letzte Aufgabe unseres Thema erledigen, nämlich die auf beide Arten gewonnenen Resultate vergleichen. Im ersten Teil der Arbeit haben wir unsere Differentialgleichung als zur Fuchs'schen Klasse gehörig betrachtet. Im zweiten Teil haben wir sie als Spezialfall der Gauss'schen Gleichung behandelt. Wie wir es bereits oben erwähnt haben, ist $P_1^n(x)$ eine ganze rationale Function und als solche ist sie für das ganze Gebiet definiert.

$$P^n(x) = cx^n F\left(-\frac{n}{2}, \frac{-n+1}{2}, \frac{-2n+1}{2}, x^{-2}\right)$$

ist, wie aus der Gestalt dieser hypergeometrischen Reihe leicht ersichtlich, ebenfalls eine ganze rationale Function n^{ten} Grades und ist so ohne weiteres für das ganze Gebiet definiert. $Q_1^n(x)$, $Q^n(x)$ haben in beiden Teilen nach der Theorie der Differentialgleichungen zunächst Gültigkeit für den Teil der Ebene, der ausserhalb des um Null geschlagenen durch $+1$, -1 hindurchgehenden Kreises liegt. $Q^n(x)$, $(P^n x)$ als Lösungen unserer Differentialgleichung sind durch eine lineare Verbindung von $P_1^n(x)$, $Q_1^n(x)$, in dem gemeinschaftlichen Definitinitionsbereich nach der Theorie der Differentialgleichungen ausdrückbar. Es ist

$$P^n(x) = c_{11} P_1^n(x) + c_{12} Q_1^n(x)$$
$$Q^n(x) = c_{21} P_1^n(x) + c_{22} Q_1^n(x).$$

Da nun $P^n(x)$ nur positive Potenzen enthält (siehe S. 12, a), $Q_1^n(x)$ nur negative (S. 3), so muss $c_{12} = 0$ sein; $Q^n(x)$ enthält (S. 21, b) nur negative, $P_1^n(x)$ (S. 3) positive, demnach

$c_{22} = 0$. $P^n(x)$ unterscheidet sich demnach von $P_1^n(x)$ um einen constanten Faktor, $Q^n(x)$ von $Q_1^n(x)$ ebenso.

Sollen Integrale von der Form $\psi_{21} + \psi_{22} \log(x-a)$ auch noch definiert sein über das ursprüngliche Gebiet hinaus, so müssen die Potenzreihen ψ_{21}, ψ_{22} analytisch fortgesetzt werden. Die Potenzreihen in $Q_1^n(x)$, $Q^n(x)$ sind nun ganze rationale Functionen, als solche haben sie ohne weiteres Gültigkeit für die ganze Ebene. $Q_1^n(x)$ wie $Q^n(x)$ stellt demnach die zweite für das ganze Gebiet gültige Lösung der Differentialgleichung dar. Bei Differentialgleichungen sind die für das ganze Gebiet definierten Lösungen von besonderer Wichtigkeit und deshalb waren die vorhergehenden Untersuchungen allein auch darauf gerichtet, diese zu ermitteln. Betrachten wir das Verhalten von $Q^n(x)$ in den Punkten $+1$, -1, ∞. Wie aus der analytischen Gestalt von

$$Q^n(x) = \frac{1}{2} P^n(x) \log \frac{x+1}{x-1} - A$$

zu ersehen, wird es in $+1$, -1 logarithmisch unendlich, nach der Form b S. 12 in $x = \infty$ Null. Was die Umlaufsrelationen von $Q^n(x)$ um die singulären Punkte anbetrifft, so vermehrt sich $Q^n(x)$, wie aus seiner analytischen Gestalt zu ersehen, auf dem geschlossenen Wege um -1 um $i\pi P^n(x)$, um $+1$ um $-i\pi P^n(x)$, wenn der Weg in positiver Richtung umlaufen wird. Bei einem Umlauf um $x = \infty$ bleibt es unverändert. Wir haben somit denselben Gültigkeitsbereich und dasselbe Verhalten in den singulären Punkten und beim Umlauf um sie für $Q^n(x)$, wie wir gewonnen haben, als wir zuerst die lineare Differentialgleichung der Kugelfunctionen einer Variablen nach der allgemeinen Theorie der Differentialgleichungen behandelt haben.

Lebenslauf.

Verfasser, Joseph Huss, katholischer Konfession, Sohn des verstorbenen Gerichtsekretärs Gustav Huss, wurde am 1. Februar 1880 zu Wreschen in Posen geboren. Seine Schulbildung erhielt er auf den Gymnasien zu Inowrazlaw, Wongrowitz und Fürstenwalde a. d. Spree, welches er zu Michaelis 1899 mit dem Zeugnis der Reife verliess, um sich dem Studium der Mathematik und Physik zu widmen. Er bezog die Universität zu Greifswald und bestand am 8. Juni 1903 das rigorosum. Während seiner Studienzeit besuchte er die Vorlesungen folgender Herren Professoren und Dozenten:

Thomé, Study, Kowalewski, Richarz, König, Mie, Limpricht, Schwanert, Auwers, Cohen, Deecke, Credner, Schuppe, Rehmke, Stock.

Allen seinen hochverehrten Lehrern, insbesondere Herrn Geh. Rath Prof. Dr. Thomé, spricht der Verfasser seinen innigsten Dank aus.

Thesen.

I.

Die determinierende Fundamentalgleichung für $x = \infty$, die man im Anschluss an Fuchs und die meisten anderen Mathematiker erhält, ist der vorzuziehen, die man nach dem Vorschlag von Heffter bildet.

II.

Für Reisebeobachtungen ist die Spitzenaufhängung besser als die Fadenbeobachtung bei Deklinationsbestimmungen.

III.

Der Anschauungsunterricht auf den humanistischen Gymnasien ist durch Betreibung der Krystallographie zu fördern.

